SOS

3/5/19

ΘΕΩΡΗΜΑ Κατηγορίας Baire

SOS

(X, d) μ.χ.

ΟΡΙΣΜΟΙ:

- Το $A \subseteq X$ λέγεται πουθενά πυκνό αν-ν $Int(\bar{A}) = \emptyset$
- Το A λέγεται 1ης κατηγορίας αν-ν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n πουθενά κλειστό, για $n = 1, 2, \dots$
- Το A λέγεται 2ης κατηγορίας αν το A δεν είναι 1ης κατηγορίας.

ΠΑΡΑΔ.:

- $\emptyset$ είναι πουθενά κλειστό

$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, A_n πουθενά κλειστό

A 1ης κατηγορίας $\boxed{\text{Ι}}$ Λ

$$\left[A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ , \ A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset \right]$$

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\{x\}$ πουθενά κλειστό $\forall x \in \mathbb{R}$

$Int(\{x\}) = \emptyset$

Άρα $\mathbb{Q}$ 1ης κατηγορίας

$\left(\begin{array}{l} \overline{\{x\}} = \{x\} \\ \mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, +\infty) \\ \text{είναι ανοικτό} \end{array} \right)$

- $d =$ διακριτή μετρική

τότε κάθε $A \subseteq X$ είναι 2ης κατηγορίας, $A \neq \emptyset$

Παρατηρήσεις: (i) A πουθενά κλειστό $\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $\bar{A}$ πουθενά κλειστό

Γιατί ?

$\Downarrow$

$\Rightarrow$) $(\bar{\bar{A}}) = \bar{A}$ ($\bar{A}$ είναι κλειστό)

$Int(\bar{A}) = \emptyset$

⟸) A πουθενά κλειστό και $B \subseteq A$ $\Big\} \Rightarrow$ B πουθενά κλειστό

$(\bar{B} \subseteq \bar{A} \Rightarrow Int\bar{B} \subseteq Int\bar{A} = \emptyset)$

Οπότε:

A 1ης κατηγορίας $\iff A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n κλειστό κ. $IntA_n = \emptyset$, $n=1,2,\dots$

Αποδ.

$\Rightarrow)$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$

$\Leftarrow)$ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\underline{A_n \cap A})$, A_n κλειστό

πουθενά κλειστό

(ii) $IntA = \emptyset \iff X \setminus A$ πυκνό

$$\left(\begin{array}{l} B \subseteq X \\ X = \bar{B} \cup Int(X \setminus B) \\ B = X \setminus A \Rightarrow X \setminus B = X \setminus (X \setminus A) = A \\ \quad \text{άρα } X = \overline{X \setminus A} \end{array}\right)$$

Οπότε A πουθενά κλειστό $\iff Int\bar{A} = \emptyset$

$\iff X \setminus \bar{A}$ πυκνό $\forall$ ανοικτό

$\iff \forall U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\} : U \cap (X \setminus \bar{A}) \neq \emptyset$

$\iff \forall U \in \tau_d \setminus \{\emptyset\}$ $\exists W$ ανοικτό $W \neq \emptyset$:

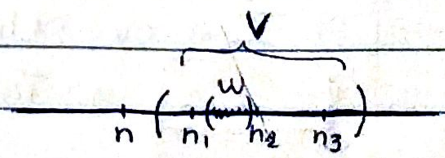
$W \subseteq U$ κ. $W \cap \bar{A} = \emptyset$

Αποδ.

$\Rightarrow)$ $W = U \cap (X \setminus \bar{A}) \neq \emptyset$

$\Leftarrow)$ $W \subseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow \underset{\neq \emptyset}{W} \subseteq U \cap (X \setminus \bar{A})$

Πχ $\mathbb{N}$ πουθενά πυκνό



$A = \{ \frac{1}{n} : n = 1,2,\dots \}$

πουθενά πυκνό

$\bar{A} = A \cup \{0\}$

SOS

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ο X λέγεται χώρος Baire αν-ν $\forall A_n$ κλειστό κ. πουθενά πυκνό, $n=1,2,\dots \Rightarrow Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$

Πρόταση: Τ.Α.Ε.Ι.: (i) ο X χώρος Baire

(ii) G ανοικτό, $G \neq \emptyset$ κ. $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n κλειστό $\Rightarrow \exists n : Int A_n \neq 0$

(αντιστροφοαντιθεση του ορισμού)

(iii) G ανοικτό, $G \neq \emptyset \Rightarrow G$ 2ης κατηγορίας

ΑΠΟΔ.:

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Αν $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n κλειστό $\Rightarrow$ Δεν είναι όλα πουθενά πυκνά

$\Rightarrow G$ όχι 1ης κατηγορίας

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Αν X όχι Baire, $\exists A_n$ κλειστό, πουθενά κλειστό.

$Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$

Αν $\underset{\emptyset \neq}{G} = Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. G ανοικτό μη κενό

$\Rightarrow G$ 1ης κατηγορίας

ΑΤΟΠΟ

Πρόταση:

X χώρος Baire $\Leftrightarrow \forall \{U_n\}_{n=1,2,\dots} \subseteq \mathcal{T}_d$, U_n πυκνό, $n=1,2,\dots$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ πυκνό

Αποδ.:

Ισχύουν: • U_n πυκνό κ. ανοικτό $\Leftrightarrow X \setminus U_n$ κλειστό πουθενά πυκνό

• Τύποι De Morgan:

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

$\Rightarrow$) Έστω $\{U_n\}$ ακολουθία από ανοικτά πυκνά.

Θ.ν.δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι πυκνό.

Έχουμε: $X \setminus U_n$ κλειστό κ. πουθενά κλειστό

Από υπόθεση (X είναι Baire) παίρνουμε:

$$\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus U_n)\right) = \emptyset$$

Άρα $X \setminus \left(\bigcup_{1}^{\infty}(X \setminus U_n)\right)$ είναι πυκνό

$\Rightarrow \bigcap_{1}^{\infty} U_n$ είναι πυκνό

$\Leftarrow$) Έστω A_n κλειστό κ. πουθενά κλειστό , $n = 1, 2, \ldots$

Θ.υ.δ.ο. $\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$

Θέτουμε $U_n = X \setminus A_n \Rightarrow U_n$ ανοικτό πυκνό

Άρα από υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n)$ πυκνό

Οπότε: $\mathrm{Int}\left(X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n\right)\right) = \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$

<u>Πρόταση</u>: X χώρος Baire. Τότε:

$\forall G \in \tau_d \setminus \{0\}$: G είναι χώρος Baire

(<u>Πόρισμα της (46)</u>)

(Όλα τα ανοικτά του G είναι 2ης κατηγορίας γιατί είναι ανοικτά κ. στο X)

ΣΟΣ

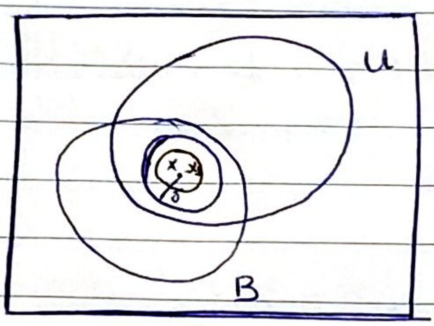
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Baire</u>: Αν X πλήρης $\Rightarrow$ ο X είναι Baire

ΑΠΟΔ.

Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ακολουθία ανοικτών πυκνών:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ πυκνό

Αν B ανοικτό, $B \neq \emptyset$ πρέπει υ.δ.ο. $B \cap (\cap G_n) \neq \emptyset$



Αφού $B\cap G_1$ ανοικτό μη κενό
$\Rightarrow \exists B_1$ ανοικτή σφαίρα :
$B_1 \subseteq B\cap G_1$ κ. $\delta(\bar{B}_1) = \frac{1}{1}$

$B_1 = S(x,\frac{\delta}{2})$
$\bar{B}_1 \subseteq B(x,\frac{\delta}{2}) \subseteq S(x_1,\delta)$

$G_2\cap B_1$ ανοικτό μη κενό
$\Rightarrow \exists B_2$ ανοικτή σφαίρα :
$\bar{B}_2 \subseteq G_2\cap B_1 \subseteq B\cap(G_1\cap G_2)$
κ. $\delta(\bar{B}_2) < \frac{1}{2}$

Επαγωγικά $\exists \{\bar{B}_n\}$ ακολουθία <u>φθίνουσα</u>, B_n ανοικτή σφαίρα : $\bar{B}_n \subseteq B\cap(G_1\cap\ldots\cap G_n)$ κ. $\delta(\bar{B}_n) < \frac{1}{n}$

Άρα αφού X πλήρης $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n = \{x\}$

Προφανώς $x\in B$ $\forall x\in G_n$, $\forall n$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $D\subseteq\mathbb{R}$, D διάστημα, $f: D\to\mathbb{R}$

Ταλάντωση της f στο $I\subseteq D$ ορίζουμε την διαφορά:

$$\omega_f(I) = \omega(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \in [0,\infty)$$

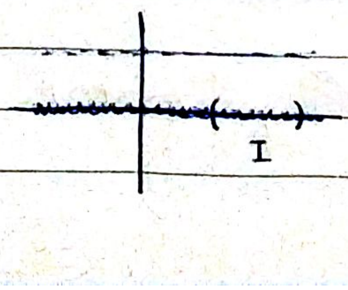
Αν $x\in D$: $I_x(\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap D$, $\delta>0$

Ταλάντωση της f στο I ονομάζουμε το όριο:

$$\omega_f(x) = \omega(x) = \lim_{\delta\to 0} \omega(I_x(\delta))$$

$\omega(I_x(\delta))$ είναι φθίνουσα συν/ση του δ
$\Rightarrow$ το όριο $\nexists$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$



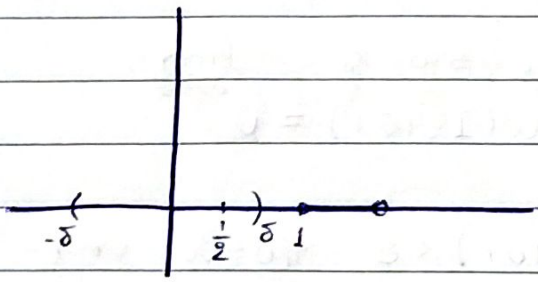
$\omega(I) = 1-0 = 1$

$\omega(x) = \lim_{\delta\to 0} \omega(I_x(\delta)) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ (4-5): Κατασκευάστε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $\omega_f(0) = +\infty$

ΛΥΣΗ:

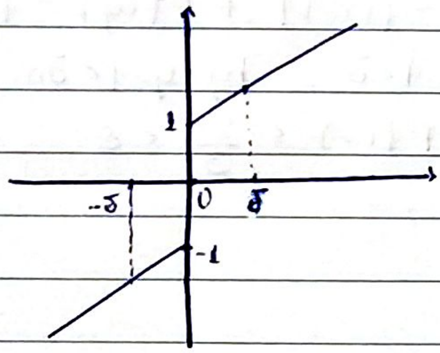
$$f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$\omega(0) = \lim_{\delta\to 0} \omega((-\delta,\delta)) = \overset{\sup}{\infty} - \overset{\inf}{0} = \infty$$

ΑΣΚΗΣΗ (4-4):

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1+x, & x<0 \end{cases} \qquad \omega(0) = ;$$



$$\omega(0) = \lim_{\delta\to\infty} \omega((-\delta,\delta)) =$$

$$= \lim_{\delta\to\infty} ((1+\delta) - (-1-\delta)) =$$

$$= \lim_{\delta\to\infty} (2+2\delta) = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ (4-3): Δ.ο. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ σύνολο 2ης κατηγορίας

ΛΥΣΗ:

Αν $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq \bigcup B_n$, B_n κλειστό κ. $\mathrm{Int}(B_n)$

Επειδή $\mathbb{Q} = \bigcup\{r_n\}$

$\mathbb{R} = (\bigcup B_n)\cup(\bigcup(r_n))$ 1ης κατηγορίας

ΑΤΟΠΟ

<u>Πρόταση</u>: $D \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα

$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

(i) f συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \omega(x_0) = 0$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}: \{x \in D : \omega(x) < a\} = \omega^{-1}((-\infty, a))$ είναι ανοικτό

<u>Απόδ.</u>:

(i) $\Rightarrow$) Έστω f συνεχής στο x_0

Θ.υ.α.ο. $\lim_{\delta \to 0} \omega(I_{x_0}(\delta)) = 0$

Έστω $\varepsilon > 0$

$\exists \delta_0 > 0 : \omega(I_{x_0}(\delta)) < \varepsilon \quad \forall \delta \leq \delta_0$

$\Leftrightarrow \sup_{|x-x_0|<\delta} f(x) - \inf_{|x-x_0|<\delta} f(x) < \varepsilon$

Από ορισμό συνέχειας για $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists \delta_0 > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ με $|x - x_0| < \delta$

$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3}$

$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta_0$

$\Rightarrow \sup f(x) - \inf f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$